Afabilidad de las laminaciones definidas por mosaicos euclídeos

Pablo González Sequeiros *

Universidade de Santiago de Compostela

Un *mosaico euclídeo* es una descomposición de $\mathbb{R}^n$ en *teselas*, generalmente poliedros dispuestos lado con lado, obtenidos por traslación a partir de un conjunto de teselas modelo o *prototeselas*. Un mosaico se denomina *aperiódico* si no es conservado por ninguna traslación, y *repetitivo* si cualquiera de sus motivos se repite por translación en el mosaico de manera uniforme. El conjunto $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ de todos los mosaicos construidos a partir de un conjunto finito de prototeselas $\mathcal{P}$ se puede dotar de una topología natural, la *topología de Gromov-Hausdorff* [1, 2], generada por los entornos

$$U(\mathcal{T})^r_{\varepsilon,\varepsilon'} = \{\mathcal{T}' \in \mathfrak{T}(\mathcal{P}) \;/\; \exists\, v, v' \in \mathbb{R}^m : \| v \| < \varepsilon, \| v' \| < \varepsilon', R(\mathcal{T}+v, \mathcal{T}'+v') > r\}$$

donde $R(\mathcal{T},\mathcal{T}')$ es el supremo de los radios $R > 0$ tales que $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ coinciden en la bola $B(0,R)$. De esta manera, $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ es un espacio metrizable compacto, dotado de una estructura foliada natural definida por la acción de $\mathbb{R}^n$. Si $D_{\mathcal{T}}$ es el conjunto de Delone determinado en $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ por la elección de un conjunto de puntos base en las prototeselas de $\mathcal{P}$, el conjunto $\Sigma = \{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})/0 \in D_{\mathcal{T}}\}$ es un subespacio cerrado y totalmente disconexo que corta a todas las hojas. La *envoltura* de un mosaico aperiódico y repetitivo $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ es la clausura de su órbita. En el caso euclídeo, todo mosaico en $\mathfrak{X} = \overline{L_{\mathcal{T}}}$ es también aperiódico y repetitivo, y por lo tanto $X = \Sigma \cap \mathfrak{X}$ es homeomorfo al conjunto de Cantor. En particular, $\mathfrak{X}$ es un subconjunto saturado, minimal y sin holonomía.

En este contexto, la foliación $\mathcal{F} = \{L_{\mathcal{T}}\}_{\mathcal{T}\in\mathfrak{X}}$ se puede identificar con la *relación de equivalencia étale* (REE) $\mathcal{R} = \{(\mathcal{T}, \mathcal{T} - v) \in X \times X/v \in D_{\mathcal{T}}\}$ y la *dinámica transversa de* $\mathcal{F}$ con la *clase de isomorfismo estable* de $\mathcal{R}$. Dos REEs $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ sobre dos espacios polacos X y X' son *establemente isomorfas* (resp. *establemente orbitalmente equivalentes*) si existen subconjuntos abiertos Y de X e Y' de X' que cortan a todas las clase de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$, y tales que las relaciones de equivalencia inducidas $\mathcal{R}|_Y$ y $\mathcal{R}'|_{Y'}$ son isomorfas (resp. orbitalmente equivalentes).

El propósito de este póster es mostrar que la dinámica transversa de $\mathfrak{X}$ está representada por la relación cofinal sobre el espacio de caminos infinitos de un diagrama de Bratteli. Esta relación de equivalencia es orbitalmente equivalente a una acción de $\mathbb{Z}$ [3, 4]. En otras palabras, la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ es *afable* en el sentido de [4]. Esto generaliza un resultado de H. Matui [6] para

*En colaboración con Fernando Alcalde Cuesta (Universidade de Santiago de Compostela) y Álvaro Lozano Rojo (Universidad del Pas Vasco-Euskal Herico Unibeersitatea) un determinado tipo de mosaicos de substitución. La prueba se lleva a cabo en tres etapas:

i) En primer lugar, construimos una relación de equivalencia afable $\mathcal{R}_\infty \subset \mathcal{R}$ e introducimos su borde $\partial\mathcal{R}_\infty$, un subconjunto cerrado de interior vacío en el que las $\mathcal{R}$-clases se descomponen en al menos dos $\mathcal{R}_\infty$-clases. Empleamos el *proceso de inflacción* descrito en [1] para definir una suceción de descomposiciones $\mathcal{B}^{(n)}$ de $\mathfrak{X}$ en un número finito de compactos foliados en producto. Ahora, $\mathcal{R}_\infty$ es el límte inductivo de una sucesión creciente de relaciones de equivalencia compactas $\mathcal{R}_n$ definidas a partir de estas descomposiciones.

ii) A continuación, probamos que $\partial\mathcal{R}_\infty$ es $\mathcal{R}$-*fino* en el sentido de [4], i.e. $\mu(\partial\mathcal{R}_\infty) = 0$ para cada medida $\mathcal{R}$-invariante μ. Reproducimos aquí en parte el mismo argumento de la prueba del lema de Rohlin, como ha hecho C. Series en [7] para probar que toda foliación con crecimiento polinomial es hiperfinita.

iii) Por último, en el caso euclídeo $\mathcal{R}_\infty$ es minimal y cada $\mathcal{R}$-clase se descompone en un número finito de $\mathcal{R}_\infty$-clases. Esto nos permitirá concluír aplicando el teorema 4.18 de [4].

Además, la prueba se puede aplicar a toda una clase mayor de *laminaciones teselables* [1]. De hecho, como consecuencia de que toda acción minimal de $\mathbb{Z}^m$ se puede definir a partir de un $\mathbb{R}^m$-solenoide, obtenemos una prueba sencilla de afabilidad para los $\mathbb{Z}^m$-sistemas minimales sobre el conjunto de Cantor [5]:

Corolario.- *Toda acción minimal de $\mathbb{Z}^m$ sobre el conjunto de Cantor es afable.*

Referencias

[1] J. Bellissard, R. Benedetti, J.M. Gambaudo, Spaces of Tilings, Finite Telescopic Approximations and Gap-Labelling, Comm. Math. Phys. 261 (2006), 1-41.

[2] E. Ghys, Laminations par surfaces de Riemann, Panor. Syntheses 8 (1999), 49-95.

[3] T. Giordano, I. Putnam, C. Skau, Topological orbit equivalence and C^*-crossed products, J. reine angew. Math. 469 (1995), 51-111.

[4] T. Giordano, I. Putnam, C. Skau, Affable equivalence relations and orbit structure of Cantor minimal systems, Ergodic Theory Dynam. Systems 24 (2004), 441-475.

[5] T. Giordano, I. Putnam, H. Matui, C. Skau, Orbit equivalence for Cantor minimal $\mathbb{Z}^2$-actions, preprint.

[6] H. Matui, Affability of equivalence relations arising from two-dimensional substitution tilings, Ergodic Theory Dynam. Systems 26 (2006), 467-480.

[7] C. Series, Foliations of polynomial growth are hyperfinite, Israel J. Math. 34 (1979), 245-258.